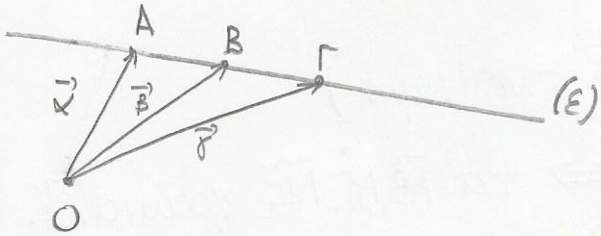
• Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα με κοινή αρχή O.
ΝΔΟ τα πέρατά τους Α, Β, Γ συνευθειακά $\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq \vec{0}$
ώστε $\lambda_1 \cdot \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\beta} + \lambda_3 \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

<u>ΛΥΣΗ</u>



$(\Rightarrow)$: Έστω ότι Α, Β, Γ συνευθειακά

$\vec{AB} \parallel \vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{AB} = \mu \vec{A\Gamma} \Rightarrow \vec{OB} - \vec{OA} = \mu(\vec{O\Gamma} - \vec{OA}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\beta} - \vec{\alpha} = \mu(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) \Rightarrow (\mu - 1)\vec{\alpha} + \vec{\beta} + (-\mu)\vec{\gamma} = 0$

Επομένως, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq \vec{0}$ με $\lambda_1 = \mu - 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -\mu$ $[\lambda_2 \neq 0]$

Καθώς $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mu - 1 + 1 - \mu = 0$

$(\Leftarrow)$: Έστω ότι $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$: $\lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\beta} + \lambda_3 \vec{\gamma} = \vec{0}$ και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Έστω, $\lambda_1 \neq 0$ ενώ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \lambda_3 = -\lambda_1 - \lambda_2$

Συνεπώς, $\lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\beta} + \lambda_3 \vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{\alpha} + \lambda_2 \vec{\beta} + (-\lambda_1 - \lambda_2)\vec{\gamma} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{\alpha} - \vec{\gamma})\lambda_1 + (\vec{\beta} - \vec{\gamma})\lambda_2 = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\Gamma A}\lambda_1 + \vec{\Gamma B}\lambda_2 = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{\Gamma A} = \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right]\vec{\Gamma B} \Rightarrow \vec{\Gamma A} \parallel \vec{\Gamma B}$, Άρα τα Α, Β, Γ συνευθειακά

• Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ διανύσματα με κοινή Αρχή O

ΝΔΟ τα Πέρατά τους A, B, Γ, Δ κείται επί του επιπέδου

$\iff \exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq \vec{0}$ ώστε $\lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} + \lambda_4\vec{\delta} = \vec{0}$ και

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$

ΛΥΣΗ

(ή A, B, Γ, Δ συνεπίπεδα)

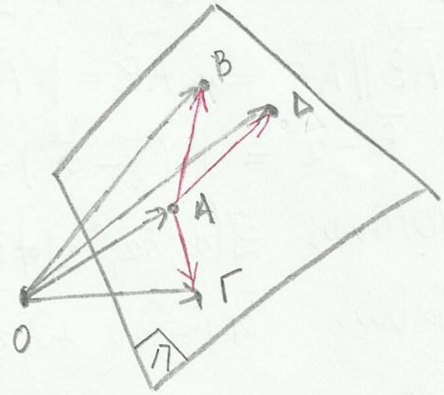
$(\Rightarrow)$ Έστω ότι τα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}$ συνεπίπεδα $\iff$ τα $\vec{AB}, \vec{A\Gamma}, \vec{A\Delta}$ γραμ. ανεξ.

δηλαδή $\exists (\lambda, \mu, \nu) \neq \vec{0}$: $\lambda\vec{AB} + \mu\vec{A\Gamma} + \nu\vec{A\Delta} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(\vec{OB} - \vec{OA}) + \mu(\vec{O\Gamma} - \vec{OA}) + \nu(\vec{O\Delta} - \vec{OA}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda(\vec{\beta} - \vec{\alpha}) + \mu(\vec{\gamma} - \vec{\alpha}) + \nu(\vec{\delta} - \vec{\alpha}) = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\lambda - \mu - \nu)\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta} + \mu\vec{\gamma} + \nu\vec{\delta} = 0$



Επομένως, $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq \vec{0}$ όπου

$\lambda_1 = -\lambda - \mu - \nu$, $\lambda_2 = \lambda$, $\lambda_3 = \mu$, $\lambda_4 = \nu$

και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = -\lambda - \mu - \nu + \lambda + \mu + \nu = 0$

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq 0$: $\lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} + \lambda_4\vec{\delta} = 0$

και $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$.

Έστω $\lambda_4 \neq 0$, ενώ $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$

Συνεπώς, $\lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} + \lambda_4\vec{\delta} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\beta} + \lambda_3\vec{\gamma} + \lambda_4\vec{\delta} = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\vec{\beta} - \vec{\alpha})\lambda_2 + (\vec{\gamma} - \vec{\alpha})\lambda_3 + (\vec{\delta} - \vec{\alpha})\lambda_4 = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{AB}\lambda_2 + \vec{A\Gamma}\lambda_3 + \vec{A\Delta}\lambda_4 = \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{A\Delta} = \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_4}\right]\vec{AB} + \left[-\frac{\lambda_3}{\lambda_4}\right]\vec{A\Gamma}$, Άρα τα A, B, Γ, Δ συνεπίπεδα